数理解析研究所講究録
518巻 1984年 96-101



# Fox's congruence modulo (2,1)

神大 中西康剛 ( Yasutaka Nakanishi )

定義. 3次元球面内の1次元結び目 $(S^3, K)$ に対し，Kと交わらぬ平凡な結び目 $O$ で $\pm\frac{1}{2}$-surgery すると新らしい結び目 $(S^3, K^*)$ が得られる。このような結び目の変形の有限列で、2つの結び目がうつりあうとき，これらは congruent modulo (2,1) であるという。( Fox[1] は，surgery の係数，$lk(K, O)$ 等から congruence mod $(n, q)$ を定義しているが，本稿では必要がないので省略する.)

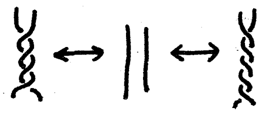
それでは 結び目の congruence class が いくつあるか であるが，次の予想がある.

予想C 全ての結び目は，congruent modulo (2,1) である.

なお，絡み輪に拡張して考えた時には，先の変形が絡み輪の成分間の絡み数を変えないことから，この予想は成り立たない．（例．Hopf-link  と 2-comp. trivial link ○○ ）

予想A，Bも列挙しておくと次の通りです．

<u>予想B</u>　全ての結び目は，congruent modulo (2,2) である．

<u>予想A</u>　全ての結び目は，  の変形の有限列でうつりあう．

なお，A ⇒ B ⇒ C の関係があるわけですが，予想Aに対しては，1983年10月KOOKセミナーで，特殊な3-braid knots と10-crossingsまでの結び目については成り立つことを示しました．

本稿では，予想Cが 全ての3-braid knotsについて成り立つことと，その確からしさの一面をAlexander多項式から照らしてみよう．

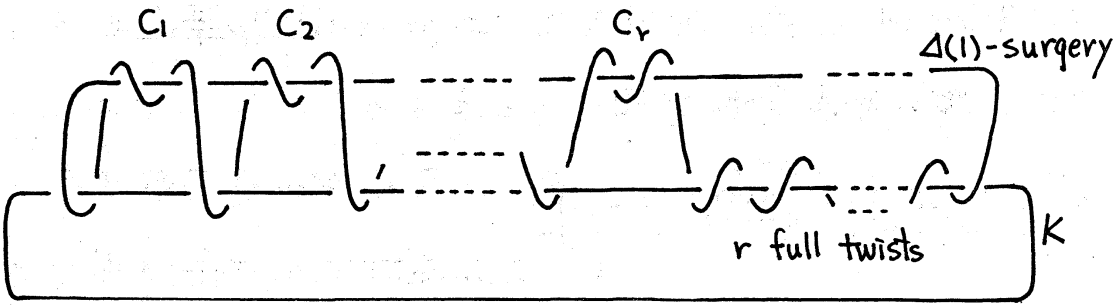
<u>命題</u>．　$\Delta(t)$ を結び目多項式とする（すなわち，$|\Delta(1)|=1$　$\Delta(t^{-1}) \doteq \Delta(t)$ をみたすLaurent多項式）．この時，$\Delta(t)$を

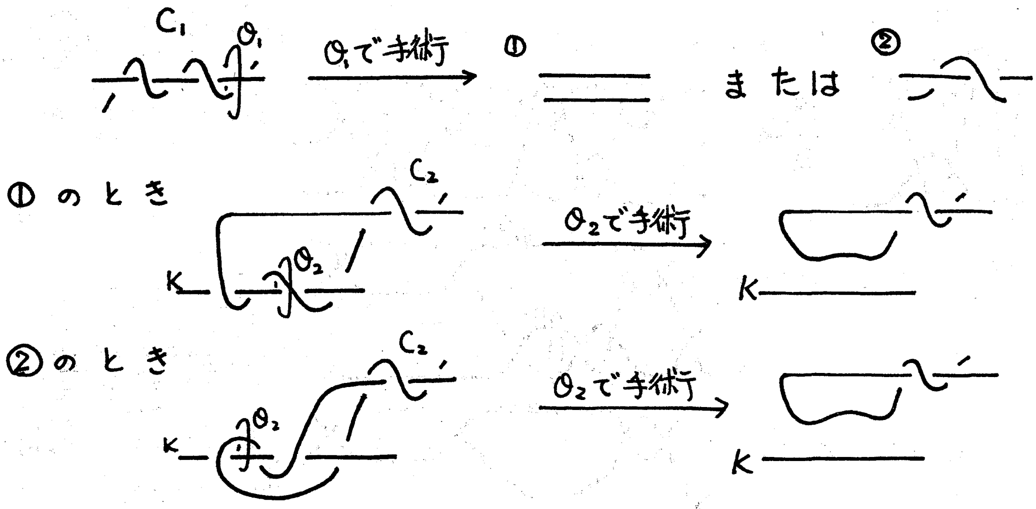
Alexander 多項式とする結び目Kで，平凡な結び目とcongruer. modulo (2, 1) であるものがある．

証明概略．Levin による surgery description で，次の図で与えられる結び目Kの Alexander 多項式は

$\Delta(t) = C_r(t^r + t^{-r}) + C_{r-1}(t^{r-1} + t^{1-r}) + \cdots + C_1(t + t^{-1}) + C_0$

である．（図では，$C_r = -2, \cdots, C_2 = 2$，$C_1 = 3$ である．）



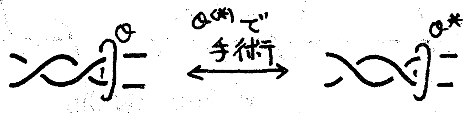




こうした変形のくり返しにより，平凡な結び目の surgery description が得られる．■

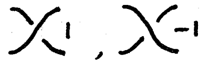
問題. Δ(t)を結び目多項式, Kを結び目とする. これらをどのようにとっても, Δ(t)を結び目多項式とし, かつ, Kとcongruentな結び目K*があるか.

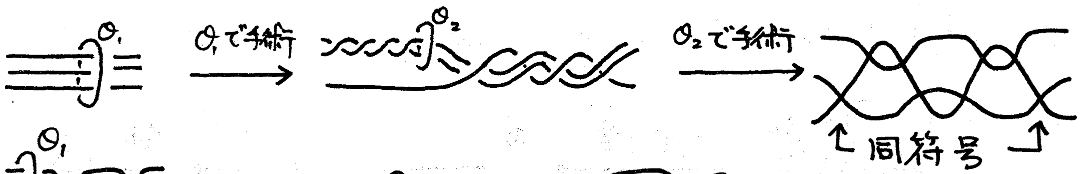
先の命題で, Alexander多項式のcongruenceに関する障害はないと言った所, 作間氏より上の問題が出た. 残念ながら未解決です.

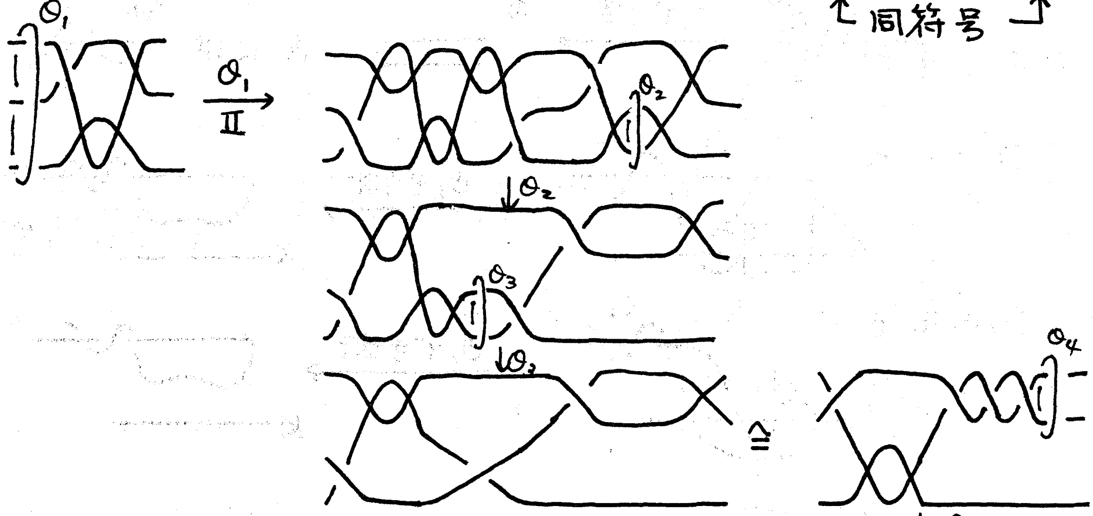
3-braid knots がすべてcongruentであることを示すために, 次の基本変形 I, II, III を考える.

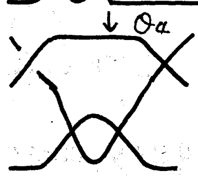
I) 


そこで ② 

①  だけで良い.

II) 

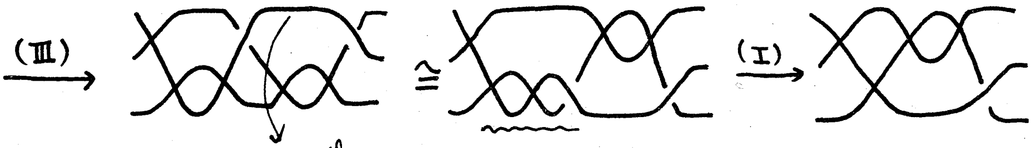

III) 

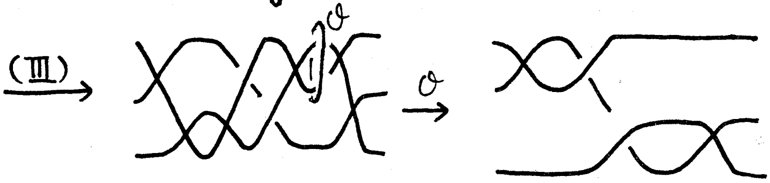

註. IIIの重要なところは②の隣の①の符号を同時に変えるところである.

つまり，Iの変形で3-braidを①，②だけにした後に，②が隣りあっておれば，IIIの変形でcrossingsを減らせる．以下，このcrossingに関するinductionで示す．

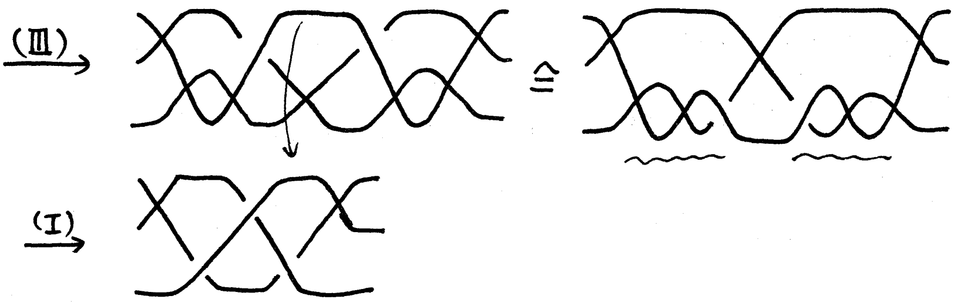
① ① ①
② ②




①①②
②①①

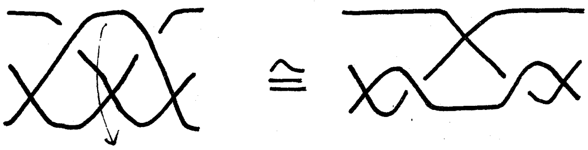



①①①①
②①②




以上から，①が4個以上続くとして良い．また，②があれば，(III) を用いて 次のパターンをcrossings をふやさずに作れる．

+1 -1
① ① ①



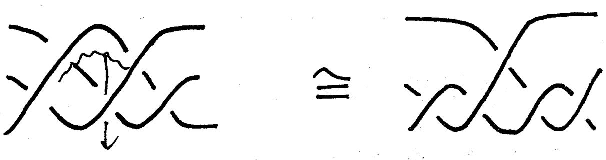

crossingをへらせるか ① ①① 型へ
② ②

故に，あと考えなくてはいけないのは 次の２タイプ．

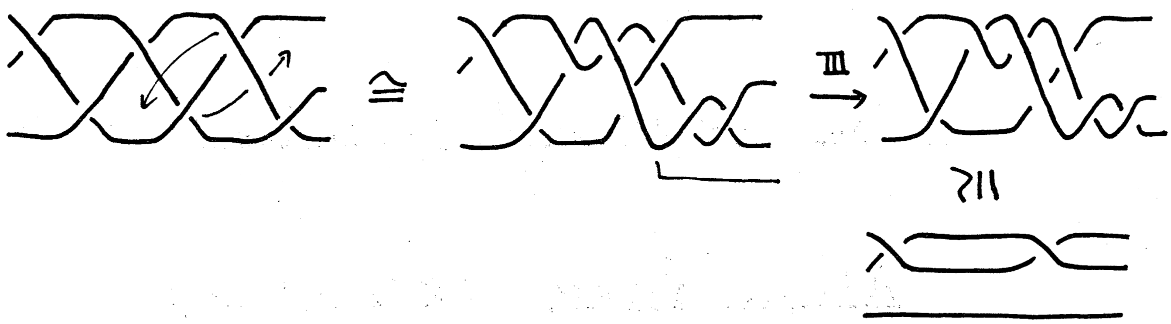
+1 +1 +1 +1 ···
-1 -1 -1 -1 ···

と

+1 +1 +1 +1 ···
+1 +1 +1 +1 ···




①①①
②② 型へ



これらの変形を施せば，10-crossings 以下にはなる．そこで，KOOKセミナー（予想A）だけで，平凡な結び目に congruent であると示せる．■

## 参考文献

[1] R.H.Fox "Congruent classes of knots" O.J.M. vol.10